Úloha číslo 7:
Coin

Tým řešitelů gymnázia Christiana Dopplera

22. března 2004

Obsah

1 Zadání

Stand a coin on its edge upon a horizontal surface. Gently spin the coin and investigate it's motion as it settles

2 Experimenty

2.1 Vlivy parametrů mince a podložky na experiment

Experimenty byly provedeny s několika druhy mincí, které se lišily především hmotností a velikostí. Jako podložku jsme použili hladké i hrubé povrchy. Relativní hmotnost mince, tedy poměr mezi jejím poloměrem a hmotností, prodlužuje dobu po kterou mince rotuje. Naopak nižší relativní hmotnost mince tuto dobu zkracuje. V případě podložky je doba rotace tím nižší, čím hrubší je povrch.

2.2 Průběh experimentu

Po roztočení mince kolem její vertikální osy setrvává mince v rotačním pohybu kolem této osy s dobou trvání závislou na úhlové rychlosti udělené této rotaci. Po uplynutí doby v řádech sekund hmotný začne střed mince a závisle na něm i odchylka mince od podložky klesat. S klesající odchylkou stoupá úhlová rychlost rotace kolem osy mince kolmé na její kruhový povrch. Tento jev je sice pozorovatelný, i když špatně, pouhým okem, lze jej však vyvodit jednoduše i tak, že rotuje-li mince kolem svislé osy a jeji odchylka od podložky je $\frac{\pi}{2}$, pak se bod, kterým se mince dotýká podložky, nemění a mince tedy kolem této na sebe sama kolmé osy nerotuje. Naopak pokud se odchylka mince od podložky dostane pod $\frac{\pi}{2}$, pak bod, kterým se mince dotýká podložky, putuje po obvodu mince a úhlová rychlost mince kolem na ni kolmé osy je nenulová.

Další pohyb mince je na popis poměrně náročný. Hmotný střed mince klesá, mince rotuje kolem na svůj kruhový povrch kolmé osy a zároveň rotuje i kolem svislice.

3 Teorie

3.1 Postup řešení

Je potřeba zvolit si dvě souřadnicové soustavy. Jednu vztaženou k podložce a jednu vztaženou k minci. Vyřešit je potom třeba jak pohyb souřadnicové soustavy mince, tak i rotaci mince v této soustavě. V řešení budeme ignorovat ztrátu energie vlivem tření mince jak s podložkou, tak i s okolním vzduchem. Uvažujeme, že mince po podložce neklouže. Minci, stejně jako podložku, považujeme ze tuhé těleso.

3.2 Úvod do řešení

Mějme trojici vektorů $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$, které tvoří neinerciální vztažnou soustavu. Vektor $\hat{\mathbf{1}}$ vychází ze středu mince a splývá s osou rotační osou mince. Vektor $\hat{\mathbf{3}}$ opět vychází ze středu mince a směřuje směrem k bodu doteku mince a podložky. Konečně vektor $\hat{\mathbf{2}}$ je definován jako vektorový součin vektorů $\hat{\mathbf{3}}$ a $\hat{\mathbf{1}}$.

$$\hat{\mathbf{2}} = \hat{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{1}} \tag{1}$$

z toho vyplývá, že $\hat{\mathbf{2}}$ je vždy vodorovný a vždy leží v rovně mince. Vektory $\hat{\mathbf{1}}$ a $\hat{\mathbf{3}}$ jsou pak na sebe samozřejmě kolmé. Odklon mince od podložky budeme značit α. Dále máme vektor $\mathbf{a}$, který vede středem mince k již zmiňovanému bodu dotyku a splývá tedy s vektorem $\hat{\mathbf{3}}$.

3.3 Rotace

Úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}_{123}$, která bude vyjadřovat rychlost otáčení trojice vektorů $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$ kolem vertikály $\hat{\mathbf{z}}$ procházející hmotným středem mince můžeme zapsat jako

$$\boldsymbol{\omega}_{123} = \Omega\hat{\mathbf{z}} + \dot{\alpha}\hat{\mathbf{2}} = \Omega\cos\alpha\hat{\mathbf{1}} + \dot{\alpha}\hat{\mathbf{2}} - \Omega\sin\alpha\hat{\mathbf{3}} \tag{2}$$

kde

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos\alpha\hat{\mathbf{1}} - \sin\alpha\hat{\mathbf{3}} \tag{3}$$

a kde $\Omega, \dot{\alpha}$ (derivace úhlu odklonu mince podle času) značí složky úhlové rychlosti ω_{123} vzhledem k osám $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{2}}$. Složku vztaženou k ose $\hat{\mathbf{r}}$, kde $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{2}} \times \hat{\mathbf{z}}$ a je tedy 3. osou pro rotaci trojice $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$, můžeme vynechat, neboť i osa $\hat{\mathbf{2}}$ je horizontální.

3.4 Pohybové rovnice

Dále vyvodíme, že

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{1}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_{123} \times \hat{\mathbf{1}} = -\Omega \sin\alpha \hat{\mathbf{2}} - \dot{\alpha}\hat{\mathbf{3}} \tag{4}$$
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{2}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_{123} \times \hat{\mathbf{2}} = \Omega \sin\alpha \hat{\mathbf{1}} - \Omega\cos\alpha\hat{\mathbf{3}} = -\Omega\hat{\mathbf{r}} \tag{5}$$
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{3}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_{123} \times \hat{\mathbf{3}} = \dot{\alpha}\hat{\mathbf{1}} + \Omega\cos\alpha\hat{\mathbf{2}} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

kde

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{2}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\sin\alpha\hat{\mathbf{1}} + \cos\alpha\hat{\mathbf{3}} \tag{8}$$

pro který platí

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t} = \Omega\hat{\mathbf{2}} \tag{9}$$

Pro úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$ mince kolem $\hat{\mathbf{1}}$ pak platí, že

$$\omega_{rel}\hat{\mathbf{1}} = \omega_1 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{123} + \omega_{rel}\hat{\mathbf{1}} \tag{11}$$

zkombinujeme-li předcházející s (2), dostáváme

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\hat{\mathbf{1}} + \dot{\alpha}\hat{\mathbf{2}} - \Omega\sin\alpha\hat{\mathbf{3}} \tag{12}$$

nebudem-li brát v úvahu ztrátu energie vlivem tření mince se vzduchem a podložkou

$$\boldsymbol{v}_{kontakt} = \boldsymbol{v}_{hs} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = 0 \tag{13}$$

z čehož

$$\boldsymbol{v}_{hs} = \frac{\mathrm{d}r_{hs}}{\mathrm{d}t} = a\hat{\mathbf{3}} \times \boldsymbol{\omega} = -a\dot{\alpha}\hat{\mathbf{1}} + a\omega_1\hat{\mathbf{2}} \tag{14}$$

kde

$$a\hat{\mathbf{3}} = \mathbf{a} \tag{15}$$

V rovnici (14) je ω_1 složkou úhlové rychlosti mince v soustavě os $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$ (vyvozeno za použití rovnice (12))

Dále zavedeme vektor $\boldsymbol{r}_{hs}$, že střed mince se nachází v bodě určeném polohovým vektorem $\mathbf{r}_{hs}$ určeným rovnicí

$$\boldsymbol{r}_{hs} = x_a\hat{\mathbf{x}} + y_a\hat{\mathbf{y}} + k_r\hat{\mathbf{r}} - a\hat{\mathbf{3}} \tag{16}$$

kde r je vzdálenost bodu dotyku od středu kružnice, kterou bod dotyku opisuje a platí

$$k_r\hat{\mathbf{r}} = r \tag{17}$$

Úhlová rychlost ω_1 musí být zvolena nezáporně a hodnota b, tedy vzdálenost od středu kružnice opsané bodem dotyku mince a podložky, musí mít stejné znaménko jako Ω.

3.5 Tensor

Kromě osy $\hat{\mathbf{1}}$ nejsou rotační osy mince $(\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}, \hat{\mathbf{3}})$ tělesovými osami, ale inerciální tensor I_{ij} je diagonální.

$$I_{11} = 2kma^2 \tag{18}$$

$$I_{22} = I_{33} = kma^2 \tag{19}$$

$$L = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Pro minci, tedy disk s homogenním rozložením hmotnosti je $k = \frac{1}{4}$.

Moment stervačnosti vzhledem k hmotnému středu tělesa můžeme zapsat jako

$$L_{hs} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = kma^2(2\omega_1\hat{\mathbf{1}} + \dot{\alpha}\hat{\mathbf{2}} - \Omega\sin\alpha\hat{\mathbf{3}}) \tag{21}$$

Nakonec také váme, že jediné síly, které na minci působí jsou v bodu doteku síla F a v hmotném středu síla $-mg\hat{\mathbf{z}}$

Pohybová rovnice pro hmotný střed r_{hs} je pak

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r_{hs}}{\mathrm{d}t^2} = F - mg\hat{\mathbf{z}} \tag{22}$$

rotační rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}L_{hs}}{\mathrm{d}t} = N_{hs} = a \times F \tag{23}$$

kterou lze upravit na

$$\frac{1}{ma}\frac{\mathrm{d}L_{hs}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2 r_{hs}}{\mathrm{d}t^2} \times \hat{\mathbf{3}} = g\hat{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{z}} \tag{24}$$

z čehož

$$0 = (2k+1)\omega_1 + \dot{\alpha}\Omega \sin\alpha = 0 \tag{25}$$

$$\frac{g}{a}\cos\alpha = k\Omega^2 \sin\alpha\cos\alpha + (2k+1)\omega_1\Omega\sin\alpha - (k+1)\ddot{\alpha} \tag{26}$$

$$0 = \dot{\Omega}\sin\alpha + 2\dot{\alpha}\Omega\cos\alpha + 2\omega_1\dot{\alpha} \tag{27}$$

4 Shrnutí

Výsledkem naší práce jsou tedy pohybové rovnice, které popisují vztahy jednotlivých veličin. Tyto rovnice nepopisují přesně pohyb skutečné mince, neboť je zanedbaná jakákoliv ztráta energie způsobená třením s podložkou a s okolním vzduchem.

Poděkování

Rádi bychom poděkovali našemu konzultantovi, Doc. RNDr. Antonínu Havránkovi CSc a Jiřímu Hronovi za jejich pomoc při řešení této úlohy.

Reference

[1] A. J. McDonald; K. T. McDonald, *The Rolling Motion of a Disk on a Horizontal Plane*, Princeton, Princeton University, 2001

[2] A. Havránek, *Mechanika 1: tuhý bod a tuhé těleso*, Praha, Karolinum, 1995

[3] R. P. Feynmann, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmannovy přednášky z fyziky 1*, Havlíčkův Brod, Fragment, 2001