# Úloha číslo 10:
# Two Chimneys

Tým řešitelů gymnázia Christiana Dopplera

12. března 2004

# Obsah

# Zadání

Two chimneys stand on a box with one transparent side. Under each chimney there is a candle. A short period after the candels are lit one flame becomes unstable. Examine the case and present your own theory of what is happening.

## Překlad zadání

Dva komíny vystupují z krabice s jednou průhlednou stěnou. Pod každým z nich je svíčka. Za krátký okamžit po zapálení obou svíček začne být jeden z plamenů nestabilní. Prozkoumejte tento jev a prezentujte svoji vlastní teorii o tom, co se zde odehrává.

# 1 Experimenty

K experimentování jsme používali vlastnoručně vyrobenou stavebnici. Součástí této stavebnice byla jedna krabice, na kterou se daly napojit různé tloušťky komínů. Každý komín se mohl skládat z různého počtu dílů dané šířky, což zajistilo dostatečnou variabilitu aparatury. Teplotu vzduchu jsme měřili elektronickými snímači u obou konců obou komínů. Při experimentování se nám ověděilo zvýraznit proudění vzduchu dýmem z doutnajícího papíru namočeného v parafínu.

Systém se pokaždé choval stejně, jeden z komínů začal sát čerstvý vzduch dovnitř aparatury, kdežto druhým se tlačily splodiny smíchané se vzduchem ven z aparatury. To, který komín převzal iniciativu záleželo na mnoha faktorech. Asi nejdůležitějším byla tloušťka obou komínů, jen při extrémních rozdílech ostatních parametrů se občas povedlo, že výrazně širší komín se stal nasávajícím z okolí. Také byla důležitá počáteční intenzita oření svíček, čím větší byla, tím větší byla pravděpodobnost, že komín, který je nad ní, se stane výfukem. Pokud délka komínů nebyla výrazně rozdílná, nehrála přílišnou roli, ale při větších rozdílech delší komín snáze přebíral roli výfuku. Samozřejmě měla také vliv počáteční teplota vzduchu uvnitř obou komínů.

Pokud parametry komínů nebyly extrémě odlišné, nebyl problém po stabilizaci systému v jednom stavu překlopit mírným fouknutím do výfukového komínu systém do opačného stavu (vymněnit komínům jejich role).

# 2 Náš model

## 2.1 Proč teplý vzduch stoupá?

Pro ideální plyn i reálný plyn za podmínek blízkých normálním platí stavová rovnice

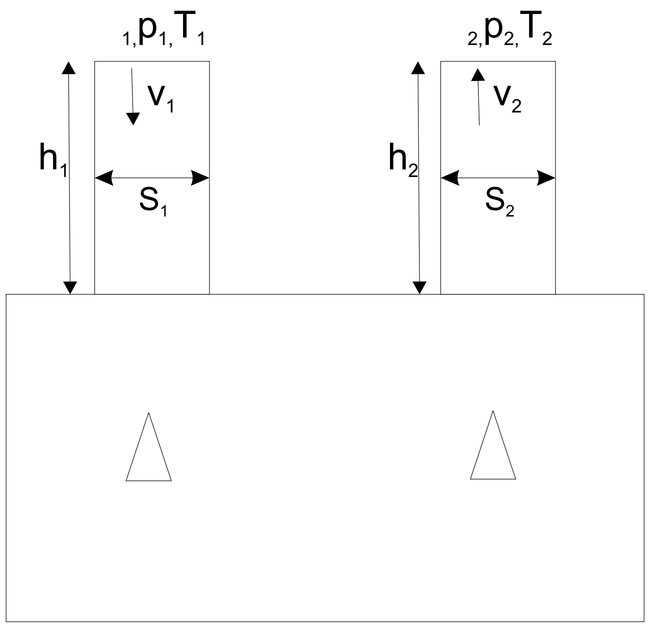
$$pV = NRT, \tag{1}$$

a tak je jasné, že pokud se zvýší teplota části plynu, tato část zvětší svůj objem na úkor studenější části. Jelikož ale hmotnost této části plynu zůstane stejná, zmenší se její hustota. Díky Archimedově začne tedy tato ohřátá část plynu stoupat.

## 2.2 Stabilizace systému

Po zapálení svíček se začne ohřívat vzduch v jejich blízkém okolí, což způsobí jeho roztažení na větší objem, neboli snížení jeho hustoty. Toto snížení hustoty způsobí díky Archimedově zákonu tendenci tohoto teplejšího vzduchu stoupat. Pro tento vzduch existují pouze dvě cesty nahoru, a to první či druhý komín. Jelikož pokud by teplý vzduch stoupal oběma komíny zároveň, klesal by tlak uvnitř krabice, může tedy nastat pouze jedna ze dvou situací, buď začne jedním komínem stoupat horký vyduch a druhým klesat studený vzduch z okolí, nebo obráceně.

Tento proces je závislý mnoha parametrech. Jedním z nejvlivnějších je šířka komínů, větší šanci převzít iniciativu mají širší komíny. Jelikož širším komínem může snadněji horký vzduch stoupat. Dalším důležitým parametrem je tepelný výkon svíček, čím vyšší, tím větší šance. Samozřejmě má také pozitivní vliv výška komínu, jelikož čím vyšší komín je, tím větší je objem nadnášeného plynu a zároveň je také větší rozdíl hustoty okolního vzduchu mezi spodním a horním ústím komínu.




Obrázek 1: Nákres stabilizovaného systému

## 2.3 Stabilizovaný systém

Po stabilizaci systému se náš systém stává termodynamicky nerovnovážně statickým, což znamená, že všechny termodynamické veličiny závisí pouze na poloze, a žádná z nich se nemění v dané poloze s časem. Pro naši teorii budeme předpokládat, že vzduch je neviskózní nestlačitelná tekutina, a vzduch při průchodu komínem neztrácí vlivem jeho interakce s komínem žádnou energii(ani mechanickou, ani tepelnou). Z výše uvedeného mj. plyne, že gradient rychosti proudění uvnitř komínu je nulový. Nákres takovéhoto systému je na obrázku 1, kde $T$ označuje teplotu, $\rho$ hustotu vzduchu u ústí komínu, $S$ průřez komínu, $p$ atmosferický tlak u ústí komínu a $v$ velikost rychlosti proudění vzduchu.

### 2.3.1 Určení závyslosti výstupní teploty

Jelikož musí platit zákon zachování kontinuity, musí hmotnost vzduchu který se nasaje do krabice za časový úsek $\Delta t$ být stejná jako hmotnost vzduchu který za tento úsek opustí krabici. Jinými slovy

$$\Delta m = S_1 v_1 \rho_1 \Delta t, \tag{2}$$

také víme, že teplo, které je předáno za tento časový úsek vzduchu uvnitř krabice je

$$\Delta U = P\Delta t, \tag{3}$$

kde $P$ je tepelný výkon svíček. No a jelikož víme, že teplota v libovolném bodě je konstantní v čase, můžeme jednoduše odvodit, že

$$T_2 - T_1 = \frac{\Delta U}{\Delta mc}, \tag{4}$$

kde $c$ je tepelná kapacita vzduchu. Když tedy dáme rovnice (4), (2) a (3) dohromady dostaneme

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= \frac{\omega}{v_1 \rho_1 S_1}, \\ \frac{T_1}{T_2} &= \frac{T_1}{T_1 + \frac{\omega}{v_1 \rho_1 S_1}}, \end{aligned} \tag{5}$$

kde $\omega$ je zavedeno substitucí $\omega = P/c$. Což je velmi příjemné, jelikož vše kromě $v_1$ a $T_2$ známe.

### 2.3.2 Určení závyslosti výstupní hustoty

Pokud si vezmeme nějaký malý objem $V_1$ vzduchu s teplotou $T_1$ a hmotností $m$ z příchozího komínu, a uvědomíme si, že při opouštění krabice má již teplotu $T_2$ a objem $V_2$, pak můžeme snadno z vlastností tekutin snadno odvodit

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{T_1 m}{V_1 T_2} = \frac{T_1}{T_2} \rho_1. \tag{6}$$

### 2.3.3 Určení poměru mezi vstupní a výstupní rychlostí

Jelikož platí již zmíněný zákon zachování kontinua, platí

$$v_1 S_1 \rho_1 = v_2 S_2 \rho_2 \tag{7}$$

Po dosazení rovnice (6) získáváme vztah

$$v_2 = \frac{T_1}{T_2} \frac{S_1}{S_2} v_1 \tag{8}$$

### 2.3.4 Bernoulliho rovnice

Jelikož uvažujeme neviskózní nestlačitelnou tekutinu, musí platit Bernoulliho rovnice

$$p + \varphi(h) + \rho \frac{v^2}{2} = konst., \tag{9}$$

kde $\varphi$ je statický geometrický tlak pro výšku $h$, v našem případě $\varphi(h) = g\rho h$. Dosadíme-li si tedy na jednu stranu rovnice stav na horním ústí nasávajícího komínu, a na druhou stav u horníhího ústí vyfukujícího komínu dotaneme vztah

$$p_1 + g\rho_1 h_1 + \rho_1 \frac{v_1^2}{2} = p_2 + g\rho_2 h_2 + \rho_2 \frac{v_2^2}{2} \tag{10}$$

Ze kterého rafinovanými matematickými úpravami, za nemalé pomoci rovnic (6), (5) a (8), odvodíme kubickou rovnici

$$\begin{aligned} & v_1 \left( T_1 \left( p_1 - p_2 + g\rho_1 \left( h_2 - h_1 \right) \right) - \frac{\omega^2}{2\rho_1 S_2^2 T_1} \right) + \\ & + v_1^2 \left( \omega \left( \frac{S_1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1} \right) \right) + \\ & + v_1^3 \left( \frac{1}{2} T_1 \rho_1 \left( 1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right) \right) + \\ & + \frac{\omega}{\rho_1 S_1} \left( p_1 - p_2 - \rho_1 g h_1 \right) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Tato kubická rovnice je příjemná tím, že vše kromě $v_1$ jsme schopni buď změřit přímo na aparatuře mimo provoz, nebo najít v tabulkách. Bohužel obecné řešení kubické řešení kubických rovnic vede k velmi dlouhému a nepřehlednému zápisu konečné rovnice, budu tedy proto používat pouze dosazení do této rovnice (11) a následného spočítání řešení dle tabulkových vztahů pro kubické rovnice.

# 3 Závěr

Plamen svíčky tedy opravdu začne zkomírat proto, že jedním z komínů začne proudit vzduch směrem dolů, tedy proti svíčce hořící pod ním. Rychlost tohoto proudění lze kvantitativně odhadnout podle rovnice (11). Ovšem tato rychlost je v realit nižší, jelikož reálný vzduch je viskózní a tře se tedy o stěny komínů i krabice, navíc také vzniká místní odpor v místě náhlého rozšíření, ať již do atmosféry, či do krabice. Také by se mohla při věších rychlostech vtoků a výtoků, či extrémních délkách komínů, projevit stlačitelnost reálného vzduchu, kterou jsme zanedbali.

# Poděkování

Velmi rád bych poděkoval Doc. RNDr. Petru Chvostovi CSc. a Doc. RNDr. Antonínu Havránkovi, CSc. za mnohé konstuktivní rady, které mi při řešení tohoto problému velmi pomohly. Také musím poděkovat celému kolektivu řešícímu Turnaj mladých fyzíků na gymnáziu Ch. Dopplera, bez jejichž morální i odborné podpory by tato práce nevznikla.


# A Použité označení veličin

| Značka | Význam |
|---|---|
| $p$ | statický tlak |
| $V$ | objem |
| $T$ | termodynamická teplota |
| $v$ | rychlost proudění |
| $\rho$ | hustota |
| $S$ | průřez |
| $\Delta t$ | změna času |
| $\Delta m$ | změna hmotnosti |
| $\Delta U$ | změna vnitřní tepelné energie |
| $c$ | tepelná kapacita |
| $m$ | hmotnost |
| $h$ | výška, měřená od povrchu krabice |
| $g$ | tíhové zrychlení |
| $P$ | tepelný výkon |
| $\omega$ | substituční znaménko pro $P/c$ |
| $\varphi$ | statický geometrický potenciál |

# Reference


[1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2*, Havlíčkův Brod, FRAGMENT, 2001

[2] A. Havránek: *Mechanika 2: Kontinum*, Praha, Karolinum, 1995

[3] F. Maršík: *Temodynamika kontinua*, Praha, Academia, 1999

[4] *http://mathworld.wolfram.com/*