

Problem no. 6:  
Seebeck effect

Tým řešitelů Gymnázia Christiana Dopplera

18. března 2004

# Obsah

<b>1</b>	<b>Seebeckův jev</b>	<b>2</b>
1.1	Kvantitativní popis Seebeckova jevu . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Magnetické pole zařízení</b>	<b>3</b>
2.1	Biotův–Savartův zákon . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Závislosti výchylky střelky</b>	<b>3</b>
3.1	Závislosti pro $B$ . . . . .	4
3.1.1	Závislosti pro $I$ . . . . .	4
3.1.2	Závislosti pro $k$ . . . . .	5
3.2	Závislosti pro $B_0$ . . . . .	7
3.3	Výchylka střelky . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Maximalizace výchylky</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Experiment</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>9</b>

## Zadání úlohy

Two long metal strips are bent into the form of an arc and are joined at both ends. One end is then heated. What are the conditions under which a magnetic needle placed between the strips shows maximum deviation?

### Překlad zadání

Dva dlouhé kovové pásky jsou ohnuty do tvaru oblouku a spojeny na obou koncích. Jeden konec je poté zahříván. Jaké jsou podmínky, při kterých se kompasová střílka umístěná mezi pásky nejvíce vychýlí?

## 1 Seebeckův jev

Celý problém je založen na principu termoelektrické teorie a Seebeckova jevu. Seebeckův jev se pozoruje tehdy, je-li obvod tvořen alespoň ze dvou různých materiálů, na jejichž styku jsou různé teploty. Pak se v obvodu objeví termoelektrická síla, která závisí na rozdílu teplot obou spojů a na druhu materiálů. Vznik termoelektrické síly se navenek projeví vznikem termoelektrického napětí. Termoelektrické napětí lze naměřit u každých dvou různých materiálů, např. u dvou odlišných čistých kovů, u čistého kovu a slitiny, u dvou různých slitin a také u analogických kombinací materiálů v kapalném stavu. To je však záležitost spíše teoretická, protože je problémem udržet fázové rozhraní mezi danými materiály. Na principu Seebeckova jevu jsou založeny termočlánky.

### 1.1 Kvantitativní popis Seebeckova jevu

Máme-li spoj A–B, vzniká na něm termoelektrické napětí

$$U_{AB} = (\alpha_A - \alpha_B) (T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(\beta_A - \beta_B) (T_2 - T_1)^2, \quad (1.1)$$

kde  $T_{1,2}$  značí termodynamické teploty spojů a  $\alpha$  a  $\beta$  jsou tzv. Seebeckovy koeficienty. Hodnoty Seebeckových koeficientů spolu s měrným elektrickým odporem pro vybrané kovy a slitiny jsou uvedeny v Tabulce 1.1.

Kov	$\frac{\alpha}{\mu\text{V K}^{-1}}$	$\frac{\beta}{\mu\text{V K}^{-2}}$	$\frac{\rho_b}{\mu\Omega\text{ m}}$	$\frac{\alpha_\rho}{10^{-3}\text{ K}^{-1}}$
Konstantan	-38,1	-0,0888	0,49	0,05
Měď	2,71	0,0079	0,0175	4
Nikl	-19,1	-3,02	0,11	6,7
Platina	-3,03	-3,25	0,11	3,9
Železo	16,7	-0,0297	0,098	5

Tabulka 1.1: Seebeckovy koeficienty, rezistivita a teplotní součinitel odporu pro vybrané kovy a slitiny

## 2 Magnetické pole zařízení

### 2.1 Biotův–Savartův zákon

Pro indukci stacionárního magnetického pole platí v obecném případě Biotův–Savartův zákon:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_2 \times \mathbf{r}_{12}^0}{r_{12}^2} dV_2. \quad (2.1)$$

Pro tenké vodiče (čímž můžeme kovové pásky aproximovat) můžeme vztah (2.1) upravit nahrazením  $\mathbf{j}dV$  za  $\mathbf{I}d\ell$ :

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}_2 \times \mathbf{r}_{12}^0}{r_{12}^2} d\ell_2. \quad (2.2)$$

Leží-li celý obvod v jedné rovině a je-li v celém obvodu konstantní proud, jenž teče ve směru vodiče, dostáváme pro velikost intenzity magnetického pole vztah

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{r_{12}^2} (d\ell_2 \times \mathbf{r}_{12}^0) \quad (2.3a)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha_{21}}{r_{12}^2} d\ell_2. \quad (2.3b)$$

## 3 Závislosti výchylky střelky

Označme si  $\mathbf{B}$  magnetickou indukci vyvolanou polem v cívce a  $\mathbf{B}_0$  indukci vnějšího magnetického pole. Výchylka střelky je dána směrem působícího magnetického pole před a po zahřívání aparatury. Označíme-li  $\mathbf{k}^1$  konstantu

<sup>1</sup>Konstanta  $\mathbf{k}$  bude mít směr shodný s  $\mathbf{B}$ .

přímé uměrnosti mezi proudem ve smyčce a magnetickým polem smyčky, tedy

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}I. \quad (3.1)$$

Dále si označme  $\mathbf{B}_0$  intenzitu vnějšího magnetického pole. Potom bude změna vychýlení střelky dána úhlem  $\Delta$ , který svírá vektor  $\mathbf{B}_0$  s vektorem  $\mathbf{B} + \mathbf{B}_0$ .

### 3.1 Závislosti pro $B$

$B$  závisí na  $k$  a  $I$  (3.1).

#### 3.1.1 Závislosti pro $I$

Podle Ohmova zákona pro proud  $I$  platí  $I = U/R$ . Odpor  $R$  se bude skládat ze dvou složek:

1. Odpor samotných kovových pásků — velikost odporů  $R_{A,B}$  bude dána vztahem (předpokládáme lineární rozložení teplot, tedy  $\frac{dl}{dT} = \frac{l}{T_2 - T_1}$ )

$$R_{A,B} = \int_{-l/2}^{l/2} \rho [1 + \alpha(T - T_0)] \frac{1}{d\delta} dl \quad (3.2a)$$

$$R_{A,B} = \frac{\rho}{d\delta} \int_{T_1}^{T_2} [1 + \alpha(T - T_0)] \frac{l}{T_2 - T_1} dT \quad (3.2b)$$

$$R_{A,B} = \frac{\rho l}{(T_2 - T_1)d\delta} \left[ T - T\alpha T_0 + \frac{1}{2}\alpha T^2 \right]_{T_1}^{T_2} \quad (3.2c)$$

$$R_{A,B} = \frac{\rho l}{(T_2 - T_1)d\delta} \left[ T \left( 1 - \alpha T_0 + \frac{1}{2}\alpha T \right) \right]_{T_1}^{T_2} \quad (3.2d)$$

$$R_{A,B} = \frac{\rho l}{(T_2 - T_1)d\delta} \cdot \left[ T_2 \left( 1 - \alpha T_0 + \frac{1}{2}\alpha T_2 \right) - T_1 \left( 1 - \alpha T_0 + \frac{1}{2}\alpha T_1 \right) \right] \quad (3.2e)$$

$$R_{A,B} = \frac{\rho l}{d\delta} \left[ 1 - \alpha T_0 + \frac{1}{2}\alpha(T_2 + T_1) \right]. \quad (3.2f)$$

2. Odpor spojů — vzhledem k našemu technickému zázemí není možno pásky vodivě spojit tak, aby byl odpor  $R_c$  spoje zanedbatelný. Odpor spoje má naopak výrazně větší vliv, než odpor samotných plechů.

Napětí je dáno vztahem (1.1). Vztah pro proud  $I$  v aparatuře tedy bude

$$I = \frac{U}{R} \quad (3.3a)$$

$$I = \frac{(\alpha_A - \alpha_B)(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(\beta_A - \beta_B)(T_2 - T_1)^2}{R_A + R_B + 2R_c} \quad (3.3b)$$

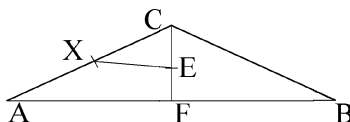
$$I = \frac{(\alpha_A - \alpha_B)(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(\beta_A - \beta_B)(T_2 - T_1)^2}{\frac{l}{\delta} \left\{ \left[ \frac{1}{2}(T_2 + T_1) - T_0 \right] (\rho_{bA}\alpha_A + \rho_{bB}\alpha_B) + (\rho_{bA} + \rho_{bB}) \right\} + 2R_c}. \quad (3.3c)$$

### 3.1.2 Závislosti pro $k$

Provedeme-li ve vztahu (2.3) substituci  $\mathbf{B} = kI$  a vydělíme-li vztah  $I$ , dostaneme

$$\mathbf{k} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha_{21}}{r_{12}^2} dl_2. \quad (3.4)$$

Každý oblouk budu aproximovat lomenou čarou s krajními body v místech spojů a s jedním vrcholem v polovině délky oblouku. Integrál (3.4) budu počítat pouze pro jednu část lomené čáry (referenční bod je přesně v ose čáry, což znamená, že přírůstek od obou částí je stejný<sup>2</sup>), je tedy nutné pravou stranu (3.4) vynásobit dvěma. Na Obrázku 3.1 je znázorněna aproximace tvaru aparatury (oblouk je reprezentován lomenou čarou  $\widehat{ACB}$ ). V bodě E



Obrázek 3.1: Lomená čára — aproximace oblouku

se nalézají kompasová střílka a je tudíž referenčním bodem pro měření  $\mathbf{B}$ . Je vzdálen  $y$  od bodu F. Délka úsečky AB je  $2a$  a úsečky CF je  $c$ .  $\alpha_{21}$  nechť je orientovaný úhel  $\widehat{AXE}$ . Ve vztahu (3.4) se úhel  $\alpha_{21}$  vyskytuje pouze formou sinu, hledáme tedy  $\sin \alpha_{21}$  v závislosti na  $l$ . Vyšetříme pouze část v polorovině CFA:

Úhel  $\alpha_{21}$  má v tomto případě hodnotu mezi 0 a  $\pi$ , jeho sinus bude tedy číslo kladné. Jeho sinus bude také roven sinu úhlu  $\beta = |\sphericalangle EXC|$ . Dále nechť  $E_1$  je pata kolmice z E na AC. Označme si nyní  $f = |EE_1| = c\sqrt{1 + \frac{h^2}{l^2}}$ ,

<sup>2</sup>Je i stejně orientovaný, neboť pro druhou část je úhel  $\alpha$  roven  $\pi$  minus  $\alpha$  pro odpovídající bod z první části lomené čáry, sinus tohoto úhlu má tedy jak stejné znaménko, tak stejnou velikost.

$l = |\text{XC}|$ ,  $c = |\text{CE}|$ ,  $y = |\text{EF}|$ ,  $|\text{XE}|$  je pak rovno  $r$  (vzálenosti  $l_2$ ,  $h$  a  $y$  určují tvar aparatury a umístění střelky). Pak platí

$$\sin \beta = \frac{|\text{EE}_1|}{|\text{XE}|} \quad (3.5a)$$

$$\sin \beta = \frac{f}{\sqrt{f^2 + r^2}} \quad (3.5b)$$

$$\sin \beta = \frac{f}{\sqrt{f^2 + (l - c)^2}} \quad (3.5c)$$

$$\sin \beta = \frac{f}{\sqrt{l^2 - 2cl + (f^2 + c^2)}}. \quad (3.5d)$$

Vztah (3.4) tedy můžeme upravit a integrál vyřešit<sup>3</sup> (řešení viz. [6]):

$$k' = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{l_0} \frac{f \, dl}{4f^2 [l^2 - 2cl + (f^2 + c^2)]^{3/2}} \quad (3.6a)$$

$$k' = \frac{\mu_0 f}{2\pi} \left[ \frac{2(2l - 2c)}{4f^2 \sqrt{l^2 - 2cl + (f^2 + c^2)}} \right]_0^{l_2} \quad (3.6b)$$

$$k' = \frac{\mu_0}{2\pi f} \left[ \frac{l_2 - c}{\sqrt{l_2^2 - 2cl_2 + (f^2 + c^2)}} - \frac{-c}{\sqrt{f^2 + c^2}} \right] \quad (3.6c)$$

$$k' = \frac{\mu_0}{2\pi c \sqrt{1 + \frac{h^2}{l_2^2}}} \left[ \frac{l_2 - c}{\sqrt{l_2^2 - 2cl_2 + c^2 \left(2 + \frac{h^2}{l_2^2}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{h^2}{l_2^2}}} \right]. \quad (3.6d)$$

Budeme-li předpokládat aparaturu, kde jsou plechy ohnuty do stejného tvaru a střelka je umístěna přesně ve středu, můžeme vztah (3.6d) zjednodušit položením  $c = h$ . Dále je nutné spočítat  $k$  pro celou aparaturu, bude tedy  $k = 2k'$ .

$$k = 2 \frac{\mu_0}{2\pi h \sqrt{1 + \frac{h^2}{l_2^2}}} \left[ \frac{l_2 - h}{\sqrt{l_2^2 - 2hl_2 + h^2 \left(2 + \frac{h^2}{l_2^2}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{h^2}{l_2^2}}} \right] \quad (3.7a)$$

---

<sup>3</sup>Vztah (3.4) se týká celé uzavřené smyčky, kdežto my zde počítáme pouze hodnotu  $k$  pro jeden oblouk. Pro přehlednost zde tedy zavádím označení  $k'$

### 3.2 Závislosti pro $B_0$

Obvykle bude nejdůležitější složkou  $B_0$  zemské magnetické pole, jehož horizontální složka dosahuje indukce  $20 \mu\text{T}$  (střelka se může pohybovat pouze vodorovným směrem, vertikální složka tedy může zůstat opomenuta).

### 3.3 Výchylka střelky

Výchylka střelky je dána úhlem svíraným  $B_0$  a  $B_c = B + B_0$ . Položme nyní kartézskou soustavu tak, aby osa  $y$  směřovala ve směru vektoru  $B$ . Potom  $B_x = 0$ ,  $B_y = |B|$ ,  $B_{x0} = |B_0| \sin \theta$  a  $B_{y0} = |B_0| \cos \theta$ , kde  $\theta$  je odchylka obou vektorů ( $\theta = \left| \widehat{B_0 B} \right|$ ). Pak pro složky  $B_c$  platí  $B_{xc} = B_x + B_{x0} = |B_0| \sin \theta$  a  $B_{yc} = B_y + B_{y0} = |B| + |B_0| \cos \theta$ . Pro výchylku  $\Delta = \left| \widehat{B_0 B_c} \right|$  platí:

$$\text{tg}(\theta - \Delta) = \frac{B_{xc}}{B_{yc}} \quad (3.8a)$$

$$\Delta = \theta - \text{atg} \frac{B_{xc}}{B_{yc}} \quad (3.8b)$$

$$\Delta = \theta - \text{atg} \frac{|B_0| \sin \theta}{|B| + |B_0| \cos \theta} \quad (3.8c)$$

$$\Delta = \theta - \text{atg} \frac{|B_0| \sin \theta}{kU/R + |B_0| \cos \theta} \quad (3.8d)$$

## 4 Maximalizace výchylky

Ke zvýšení výchylky mohou přispět následující faktory:

1.  $U \sim T$  — pro většinu článků se s rostoucím rozdílem teplot napětí článku stále zvyšuje. Pro článek Fe–Cu je však nejvyšší napětí při rozdílu teplot 372 K, což při teplotě chladnějšího konce  $T_1 = 280$  K dává výsledek  $T_2 = 652$  K, což je hodnota, od které jsme při ohřevu na plynovém vařiči příliš daleko.
2.  $R \sim T$  — předpokládali jsme, že odpor závisí lineárně na teplotě. Odpor sice s rostoucí teplotou stoupá, jev je však zanedbatelný oproti tepelné závislosti napětí.
3.  $R \sim l$  — pro minimalizaci odporu je vhodné minimalizovat délku obrouků, neboť s rostoucí délkou se lineárně zvyšuje také odpor systému.



4.  $R \sim d, \delta$  — na šířce a tloušťce závisí odpor naopak nepřímo, je tedy lepší použít silnější plech a větší šířku oblouků. Při příliš velké tloušťce je však problematické vodivé spojení plechů.
5. Počáteční poloha střelky — na počáteční poloze střelky závisí výchylka velice rapidně. Je-li  $|\mathbf{B}| > |\mathbf{B}_0|$ , pak je nejvýhodnější nastavit aparaturu tak, aby obě pole směřovala proti sobě (při interakci bude výsledné pole  $\mathbf{B}_c$  směřovat na opačnou stranu, než pole  $\mathbf{B}_0$ , což zajistí maximální výchylku). V opačném případě je nutné maximální výchylku určit nalezením maxima  $\Delta$  v závislosti na  $\theta$ . Platí

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = 1 - \frac{B_0(B_0 + B \cos \theta)}{B^2 + 2BB_0 \cos \theta + B_0^2} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\Delta^2}{d^2\theta} = \frac{BB_0 \sin \theta (B^2 - 2B_0^2)}{(B^2 + 2BB_0 \cos \theta + B_0^2)^2}. \quad (4.2)$$

Hledáme takové  $\theta_0$ , pro které je  $\frac{d\Delta}{d\theta} = 0$  a  $\frac{d\Delta^2}{d^2\theta} < 0$ :

$$1 - \frac{B_0(B_0 + B \cos \theta)}{B^2 + 2BB_0 \cos \theta + B_0^2} = 0 \quad (4.3)$$

$$B_0^2 + BB_0 \cos \theta = B^2 + 2BB_0 \cos \theta + B_0^2 \quad (4.4)$$

$$-B^2 = BB_0 \cos \theta \quad (4.5)$$

$$\cos \theta = -\frac{B}{B_0}. \quad (4.6)$$

Máme  $B < B_0$ , druhá derivace má tedy stejné znaménko jako  $\sin \theta$ . Úhel  $\theta$  tedy leží ve III. kvadrantu (podle znamének funkcí  $\sin \theta$  a  $\cos \theta$ ).

## 5 Experiment

Pro náš experiment jsme použili článek Fe–Cu. Kovové plechy o délce  $l = 30$  cm, šířce  $d = 5$  cm a tloušťce  $\delta = 1$  mm jsme na koncích „zarolovali“ do sebe a za tepla rozkovali. Ve svěráku jsme poté plechy ohnuli do tvaru dvou stejných oblouků. Jeden konec jsme zahřívali na plynovém vaříči na teplotu 700 K, druhý jsme ochlazovali proudem vody o teplotě 280 K. Podle (1.1) jsme v aparatuře dosáhli napětí 2, 5 mV, které při odporu<sup>4</sup> (3.2) 3, 37 m $\Omega$  vyvolává proud 0, 76 A. Ten indukuje magnetické pole (3.7a) 25, 5  $\mu$ T. Při měření jsme zvolili  $\theta = 120^\circ$ . Teoreticky by tedy výchylka měla být (3.8) 72°. V experimentu jsme výchylku změřili na 70°, což je v dobré shodě s teorií.

<sup>4</sup>Do odporu je započítán i odpor spoje  $R_c = 1$  m $\Omega$

## 6 Závěr

V problému se nám podařilo teoreticky odvodit příčiny výchylky magnetky i spočítat velikost výchylky. Naši teorii jsme potvrdili experimentem.

## Poděkování

Chtěl bych poděkovat především svému kamarádovi Petrovi „Šmudlovi“ Husákovi, který mi pomohl s výrobou aparatury, čímž výrazně přispěl k vyřešení úlohy. Za pomoc při výrobě aparatury bych chtěl také poděkovat Geofyzikálnímu ústavu Akademie věd České republiky.

## Přehled použitých označení

Označení	Význam
$U_{AB}$	Termoelektrické napětí článku
$\alpha, \beta_{A,B}$	Seebeckovy koeficienty
$\rho_b$	Měrný elektrický odpor při teplotě $T_0$
$T_0$	Referenční teplota pro teplotní součinitel odporu ( $T_0 = 290$ K)
$\alpha_\rho$	Teplotní součinitel odporu
$\mu_0$	Permeabilita vakua ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H m <sup>-1</sup> )
$\mathbf{j}$	Hustota elektrického proudu
$I$	Elektrický proud (může vystupovat i jako vektor)
$\alpha_{21}$	Orientovaný úhel svíraný $\mathbf{I}$ a $\mathbf{r}_{12}$
$\mathbf{k}$	Konstanta přímé úměrnosti mezi $\mathbf{B}$ a $I$
$\mathbf{B}$	Indukce vlastního magnetického pole aparatury
$\mathbf{B}_0$	Indukce vnějšího magnetického pole
$\theta$	Odchylka horizontálních složek vektorů $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}_0$
$\Delta$	Výchylka střelky
$R_{A,B}$	Odpor pásků
$l$	Délka pásků
$d$	Šířka pásku
$\delta$	Tloušťka pásku

## Reference

- [1] Sedlák, B.; Štoll, I.: *Elektřina a magnetismus*, Praha, Academia a Karolinum, 1993

- [2] Valouch, M.: *Pětimístné logaritmické tabulky a tabulky konstant*, Praha, SNTL, 1967
- [3] <http://www.vscht.cz/met/stranky/vyuka/labcv/labor/fyzmet03/>
- [4] <http://www.converter.cz/>
- [5] Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky*, II. díl, Havlíčkův Brod, Fragment, 2001
- [6] Rektorys, K. a spol.: *Přehled užité matematiky*, Praha, SNTL, 1981