

Úloha číslo 7:
Pebble skipping

Tým řešitelů gymnázia Christiana Dopplera

16. března 2004

Obsah

1	Experimenty	2
2	Náš Model	2
2.1	Pohybové rovnice při kolizi	3
2.2	Ztráty energie	5
2.3	Rotace oblázku	6
3	Odhad počtu odrazů	7
3.1	Zpomalování oblázku	7
3.2	Destabilizace náklonu	7
4	Závěr	8
A	Použité označení veličin	10

Zadání

It is possible to throw a flat pebble in a such way that it can bounce across a water surface. What conditions must be satisfied for this phenomenon to occur?

Překlad zadání

Je možné hodit plochý oblázek takovým způsobem, že začne skákat napříč vodní hladinou. Jaké podmínky musí být splněny, aby tento jev nastal?

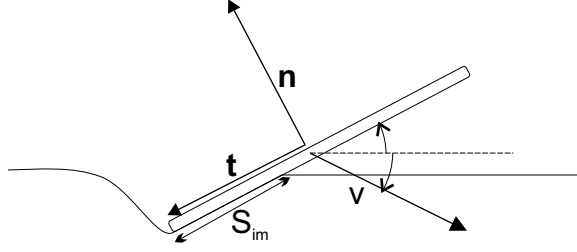
1 Experimenty

Experimentálně jsme ověřili, že lze hodit oblázek tak, že začne skákat napříč vodní plochou, lidově se tomuto jevu říká házení žabek. Používali jsme oblázky různých tvarů a velikostí, přičemž se ukazovalo, že čím více byl oblázek plochý, tím snadněji se docílí kýženého skákání. Velikost se zdála býti omezující pouze tím, že s většími, neboli těžšími, oblázky se hůře háže, samozřejmě moc malé a lehké oblázky natolik brzdil vzduch a kontakt s vodou, že nebyly schopny udržet dostatečně velkou rychlost pro skákání. Oblázky bylo nutno rozrotovat při hodů, aby je jejich rotace stabilizovala při odrazech a nezapadly do vody při prvním, či druhém kontaktu s vodou. Při experimentech jsme povětšinou dosahovali mezi 5-ti až 10-ti odrazy, ale maximální počet odrazů námy dosažený byl 16 odrazů.

2 Náš Model

Náš model aproximuje oblázek jako disk se zanedbatelnou tloušťkou, který byl hozen s náklonem θ s počáteční rychlostí \mathbf{v}_0 . Předpokládáme, že relevantní děje se odehrávají pouze při kontaktu oblázku s vodou, neuvažujeme interakci oblázku se vzduchem. Také předpokládáme, že náklon θ je v průběhu kolize s vodou konstantní díky rotaci oblázku.

Když se trochu více podíváme na kontakt oblázku s vodou, zjistíme, že Reynoldsovo číslo, definované jako $Re = va/\nu$, kde ν je kinetická viskozita vody ($\nu \sim 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ pro vodu) a a je specifický rozměr (pro oblázek uvažujeme 10cm), je v řádu 10^5 . Při této velikosti Re se dá předpokládat odporová i vztahová síla kvadraticky závislá na okamžité rychlosti oblázku a lineárně na S_{im} , jelikož již nehrají velkou roli síly způsobené viskozitou, ale převládají síly způsobené setrvačností molekul vody. Z Newtonova vzorce pro obtékání těles tedy vyplývá:



Obrázek 1: Nákres našeho modelu

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}C_l\rho_w v^2 S_{im} \mathbf{n} + \frac{1}{2}C_f\rho_w v^2 S_{im} \mathbf{t} \quad (1)$$

Předpokládáme, že největší vztlaková síla bude působit, pokud je obláček pouze částečně ponořen, jelikož bude na obláček shora tlačit vzduch a zespoda voda. Pokud se tedy obláček ponoří celý, předpokládáme prudký pokles koeficientu C_l , a to tak rapidní, že vztlaková síla již s velkou pravděpodobností nebude schopna vyvážit tíhu oblázku. Zanedbáme tudíž vztlakovou sílu, která bude působit na obláček po jeho úplném ponoření, a prohlásíme, že po úplném ponoření se již nemůže obláček znovu dostat nad hladinu. Rovnice (1) může selhat pro velmi nízké rychlosti oblázku, či velké přistávací úhly, kdy ale také dojde k velké destabilizaci oblázku, kvůli které již nebude schopen odrazit se od hladiny více než jednou, či dvakrát. Omezíme se proto na velké počáteční rychlosti a menší náklony, aby bylo možné docílit co největší počet odrazů.

2.1 Pohybové rovnice při kolizi

V této sekci se budeme zabývat pouze časovým úsekem, kdy obláček je částečně ponořený. Jak již bylo řečeno, předpokládáme konstantní náklon θ (více o tomto předpokladu je řečeno v sekci 2.3). Počátek času, $t = 0$, si položíme do okamžiku, kdy se obláček dotkne hladiny. Pak po dobu kontaktu s vodou platí:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2}\rho_w v^2 S_{im} (C_l \sin \theta + C_f \cos \theta) \quad (2a)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -mg + \frac{1}{2}\rho_w v^2 S_{im} (C_l \cos \theta + C_f \sin \theta) \quad (2b)$$

Rovnice (2) jsou nelineární díky členům v^2 a díky S_{im} , které závisí na z . Přesto jsme s malou aproximací schopni přiblížit se řešení těchto rovnic. Předpokládáme-li jen malou změnu velikosti rychlosti oblázku při jedné kolizi, můžeme stanovit $v^2 \approx v_{x0}^2 + v_{z0}^2 \approx v_{x0}^2$. Tato aproximace platí jen pro velké poměry $v_{x0} : v_{z0}$.

Pokud tedy předpokládáme konstantní úhel náklonu θ , rovnice (2b) platí i pro hloubku ponoření z . Pokud ale chceme řešit rovnici (2b) musíme nejdříve stanovit závislost S_{im} na z . Jelikož nám lineární závislost $S_{im} = -az/\sin\theta$ velmi ulehčí výpočty, budeme zkoumat tento, ačkoliv nereálný případ, poskytně nám ale dostatečné přiblížení k reálné situaci. Rovnice (2b) se nám tedy změní na:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - \frac{1}{2} \rho_w v_{x0}^2 C \frac{az}{\sin\theta}, \quad (3)$$

kde $C = C_l \cos\theta - C_f \sin\theta \approx C_l$. Aby se nám lépe řešila diferenciální rovnice (3), zavedeme si substituci:

$$\omega_0^2 = \frac{C \rho_w v_{x0}^2 a}{2m \sin\theta}. \quad (4)$$

A s touto prepíšeme rovnici (3) jako

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = -g. \quad (5)$$

S počátečními podmínkami $t = 0$ (dotek s vodou), $z = 0$ a $\dot{z}_0 = v_{z0} < 0$, je řešením rovnice (5) toto:

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t + \frac{v_{z0}}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (6)$$

Z rovnice (6) jasně vyplývá, že maximální hloubka dosažená oblázkem při kolizi s vodou je

$$|z_{max}| = \frac{g}{\omega_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 v_{z0}}{g} \right)^2} \right). \quad (7)$$

Jak bylo řečeno dříve, předpokládáme, že oblázek se odrazí pouze pokud nedosáhne stavu, kdy je celý ponořen. Jinými slovy pokud $|z_{max}| < a \sin\theta$. Pokud použijeme rovnice (7) a (4) tuto podmínku můžeme zapsat jako $v_{x0} > v_c$, neboli

$$v_{x0} > v_c = \frac{\sqrt{\frac{4mg}{C \rho_w a^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2m(\tan\beta)^2}{a^3 C \rho_w \sin\theta}}}, \quad (8)$$

kde úhel β je definován jako $\tan\beta = v_{z0}/v_{x0}$. Tímto jsme získali minimální velikost v_{x0} nutnou pro odskočení. Pro klasické hodnoty, $m = 0.1\text{kg}$, $a = 0.1\text{m}$, $C_l \approx C_f \approx 1$, $\rho_w = 1000\text{kgm}^{-3}$ a $\theta \approx \beta \approx 10^\circ$ dostáváme kritickou rychlost $v_c \approx 0.71\text{ms}^{-1} \approx 1\text{ms}^{-1}$.

2.2 Ztráty energie

Doposud jsme analyzovali pouze vertikální pohyb oblázku. Z této analýzy vyplynula minimální rychlost nutná k odrazu oblázku. Tato rychlost reprezentuje minimální rychlost oblázku pro vyrovnání jeho tíhy vztlakovou silou. Ale jak z rovnic (2) vyplývá, část kinetické energie oblázek ztratí díky "tření" o vodu. Tudíž po několika málo odrazech již nebude mít oblázek dostatečně velkou rychlost pro splnění rovnice (8) a tudíž se již neodrazí a potopí se.

Je možné odhadnout zmenšení v_x použitím rovnice (2a). Pokud vynásobíme obě její strany v_x a zintegrujeme přes čas kolize, dostaneme snížení kinetické energie v x -ovém směru jakožto vykonanou práci

$$W = \frac{1}{2}mv_{xf}^2 - \frac{1}{2}mv_{x0}^2 = - \int_0^{t_{coll}} F_x(t)v_x(t)dt, \quad (9)$$

kde v_{x0} a v_{xf} jsou x -ové složky rychlosti oblázku před a po kolizi, t_{coll} je délka kolize a $F_x = \frac{1}{2}\tilde{C}\rho_w v_x^2 S_{im}$ je x -ová složka reakční síly, s $\tilde{C} = C_l \sin \theta + C_f \cos \theta$.

Hrubý odhad pravé strany rovnice (9) lze zapsat jako

$$\int_0^{t_{coll}} F_x(t)v_x(t)dt \approx v_{x0} \int_0^{t_{coll}} F_x(t)dt. \quad (10)$$

Nyní máme jednoduchou závislost $F_x(t) = \mu F_z(t)$, kde $\mu = \tilde{C}/C$. Navíc můžeme předpokládat, že průměrná vertikální síla v průběhu kolize, $\langle F_z(t) \rangle = t_{coll}^{-1} \int_0^{t_{coll}} F_z(t)dt$, je blízká tíze oblázku, tedy mg . Tudíž pro x -ovou složku reakční síly platí $\langle F_x(t) \rangle = \mu mg$. Navíc délka kolize je přibližně $t_{coll} \approx 2\pi/\omega_0$.

Takže po upravení rovnice (9) dostáváme

$$W = -\mu mg v_{x0} \frac{2\pi}{\omega_0} = -mgl, \quad (11)$$

kde l je vzdálenost po ose x , kterou urazil oblázek při kolizi, a je definována jako

$$l = v_{x0} \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2m \sin \theta}{C\rho_w a}}. \quad (12)$$

Pokud je ztráta energie W větší než původní kinetická energie, oblázek se zákonitě zastaví, což má samozřejmě za následek jeho nenávratné potopení. Za použití rovnice (9) může být tato podmínka přepsána jako $\frac{1}{2}mv_{x0}^2 > \mu mgl$. Což lze dále upravit do tvaru

$$v_{x0} > v_c = \sqrt{2\mu gl}. \quad (13)$$

Pokud použijeme stejné numerické hodnoty jako v minulém dosazení, dostaneme $\mu = 1.4$, $\ell = 13\text{cm}$, takže $v_c \approx 2\text{ms}^{-1}$. Toto kritérium je tedy více omezující, než předcházející rovnice (8). Proto stanovíme rovnici (13) jako kritérium pro odskočení oblázku od vodní hladiny.

2.3 Rotace oblázku

Předchozí výpočty předpokládaly konstantní úhel θ . Je zřejmé, že odskoky oblázku jsou optimální, když úhel θ je nízký a pozitivní. Pokud získá oblázek při kolizi s vodou rotaci kolem osy y , neboli $\dot{\theta} \neq 0$, změní se θ během letu vzduchem od kolize ke kolizi natolik, že již nebude mít velkou šanci znovu odskočit. Proto je zde nutnost stabilizovat nějakým způsobem rotaci kolem osy y . Tuto roli zastává rotace oblázku kolem jeho hlavní osy (ta prochází jeho hmotným středem a je rovnoběžná s vektorem \mathbf{n}).

Úhlovou rychlost kolem této hlavní osy si označíme jako $\dot{\phi}_0$. V následujícím zanedbávám pro jednoduchost veškerou třecí sílu o vodu způsobenou rotací oblázku. V průběhu kolize reakční síla působí pouze na ponořenou část oblázku a tím má nenulový moment síly. Opět pro jednoduchost budu uvažovat pouze vztlakovou část reakční síly. Její moment síly (působící v hmotném středě oblázku O) lze snadno vypočítat jako $M_{lift} = OP \cdot F_{lift}\mathbf{e}_y$, kde \mathbf{e}_y je jednotkový vektor ve směru osy y a P je působíště vztlakové síly, které se nachází ve středu ponořené části. Tento moment síly je ve směru osy y a může tedy případně ovlivnit θ . Naštěstí rotace kolem \mathbf{n} přináší stabilizaci, díky známému jevu nazývaném gyroskopický efekt. Derivací pohybových rovnic rotujících objektů lze snadno odvodit tuto rovnici:

$$\ddot{\theta} + \omega^2(\theta - \theta_0) = \frac{M_\theta}{J_1}, \quad (14)$$

kde $\omega = [(J_0 - J_1)/J_1]\dot{\phi}_0$, kde $\dot{\phi}_0$ je počáteční úhlová rychlost (ve směru \mathbf{n}), a J_0 a J_1 jsou momenty setrvačnosti ve směrech \mathbf{n} a \mathbf{t} ; θ_0 je počáteční náklon a $M_0 = OP \cdot \mathbf{F}_{lift}$ je projekce momentu vztlakové síly do směru osy y . Rovnice (14) ukazuje, že absence rotace kolem hlavní osy by měla za následek změnu náklonu θ .

Jinými slovy rotace oblázku kolem hlavní osy dokáže udržet θ přibližně konstantní. Efekt momentu vztlakové síly bude minimální, právě pokud změna úhlu θ bude minimální, neboli $\partial\theta = [\theta - \theta_0]_{max} \ll 1$. Pokud nahradíme $OP \approx a$ a $M_0 \approx mga$, dostáváme $\partial\theta \approx g/(R\omega^2)$. Tudíž podmínka pro zachování konstantnosti θ je

$$\dot{\phi}_0 \approx \omega \gg \sqrt{\frac{g}{a}} \quad (15)$$

Pokud dosadíme opět poloměr 10cm, pak rovnice (15) říká, že $\dot{\theta} \gg 14\text{s}^{-1}$, což odpovídá frekvenci otáčení pár otáček do sekundy (2Hz). Tato podmínka je v praxi velmi jednoduše splněna, a odpovídá přibližně tomu, co intuitivně očekáváme pro úspěšný hod.

3 Odhad počtu odrazů

Použijeme proto idealizovaný model, kde povrch vody je dokonale rovný, žádný vzduch, idealizovaná reakční síla, a budeme se soustředit na dva hlavní faktory počtu odrazů.

3.1 Zpomalování oblázku

Je zřejmé, že díky ztrátám kinetické energie oblázku při kolizích s vodou se kinetická energie oblázku po několika úspěšných odrazech zmenší natolik, že již nebude splňovat rovnici (13). Pokud uvažujeme N úspěšných odrazů, zjistíme z rovnice (11), že za N úspěšných odrazů se nám změní kinetická energie takto:

$$\frac{1}{2}mv_x^2[N] - \frac{1}{2}mv_x^2[0] = -N\mu mg\ell, \quad (16)$$

takže oblázek se zastaví po N_c odrazech, právě když je ztráta kinetické energie větší než počáteční kinetická energie (obdobně jako argument vedoucí ke kritériu vyjádřeném rovnici (13)). Jinými slovy:

$$N_c = \frac{vx^2[0]}{2g\mu\ell}. \quad (17)$$

Pokud použijeme naše klasické hodnoty, dostáváme zhruba tyto počty odskoků:

$v_{x0}[\text{m s}^{-1}]$	5	8	12
N_c	6	17	38

3.2 Destabilizace náklonu

Druhou možností, proč již nemusí oblázek pokračovat ve svém odrážení se je již zmíněná destabilizace náklonu. Kritérium odrazu bylo stanoveno jako minimální rychlost změny úhlu θ . Ale každá kolize trochu přispěje k rotaci kolem osy y a součet těchto efektů může nevyhovět kritériu stability. Toto lze jednoduše matematicky formulovat. Jak bylo výše ukázáno, změna úhlu

θ za jeden odraz je $\partial\theta \approx g/(a/\omega^2)$. Tudíž po N odrazech bude změna tohoto úhlu $N\partial\theta$. Oblázek bude plně destabilizován u odrazu číslo N_c takovém, že $N_c\partial\theta \approx 1$, neboli

$$N_c \approx \frac{a\dot{\phi}_0^2}{g} \quad (18)$$

Pokud použijeme numerické hodnoty, jako dříve, dostaneme

ϕ_0 [rev/s]	5	14
N_c	5	38

38 odrazů je dosavadní zaznamenaný světový rekord, a 14 otáček za vteřinu je velmi hodně.

4 Závěr

Poskytli jsme tedy kvantitativní vztahy pro podmínky, které musí být splněny pro odskočení oblázku od vodní hladiny. Tyto podmínky samozřejmě v realné situaci jsou modifikovány mnoha nepředvídatelnými faktory, ať již zvlněním vodní hladiny, poryvy větru, či neideálním tvarem oblázku.

Poděkování

Velmi rád bych poděkoval Doc. RNDr. Antonínu Havránkovi, CSc. za mnohé konstruktivní rady, které mi při řešení tohoto problému velmi pomohly. Také musím poděkovat celému kolektivu řešícímu Turnaj mladých fyziků na gymnáziu Ch. Dopplera, bez jejichž morální i odborné podpory by tato práce nevznikla.

Reference

- [1] Feynman, R. P.; Leighton, R. B.; Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3*, Havlíčkův Brod, FRAGMENT, 2000
- [2] Havránek, A.: *Mechanika 1; Hmotný bod a tuhé těleso*, Praha, Karolinum, 1995
- [3] Havránek, A.: *Mechanika 2; Kontinuum*, Praha, Karolinum, 1995
- [4] Crane, H. R.: *How things work: What can a dimple do for skipping stones?*, Phys. Teach. **26**, 300-301, 1988
- [5] <http://www.stoneskipping.com/>

A Použité označení veličin

Značka	Význam
Re	Reynoldsovo číslo
ρ_w	hustota vody
\mathbf{F}	reakční síla kterou působí voda na oblázek
S_{im}	plocha ponořené části oblázku
C_l	vztlakový koeficient
C_f	odporový koeficient
C	složení odporového a vztlakového koeficientu
\mathbf{n}	jednotkový vektor kolmý k ploše oblázku
\mathbf{t}	jednotkový vektor směřující dolů po ploše oblázku
\mathbf{v}	vektor okamžité rychlosti hmotného středu oblázku
v_x	průmět okamžité rychlosti do směru rovnoběžného s hladinou
v_z	průmět okamžité rychlosti do směru kolmého k hladině
v_{x0}	průmět počáteční rychlosti do směru rovnoběžného s hladinou
v_{z0}	průmět počáteční rychlosti do směru kolmého k hladině
v_c	minimální velikost v_z pro odražení kamínku
m	hmotnost oblázku
g	velikost tíhové síly
a	šířka (průměr) oblázku
z	hloubka ponoření oblázku
ω_0	substituční frekvence (viz. rovnice (3) a (4))
W	práce
t	čas
J	moment setrvačnosti
M	moment síly